

Донбаська державна машинобудівна академія

Кафедра Підйомно-транспортних машин

Розглянуто і схвалено  
на засіданні кафедри підйомно-  
транспортних машин  
Протокол № 8 від 18 квітня 2019 р.

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни  
«Сучасні програмні засоби у наукових дослідженнях»

галузь знань 13 – «Механічна інженерія»

спеціальність 133 – «Галузеве машинобудування»

Факультет Машинобудування

Розробник: Бережна О.В., доц. кафедри ПТМ, д.т.н,

Краматорськ – 2019 р.

## Лекція 1. Системи

### План

1. Об'єкти та процеси реального світу як системи
2. Склад та структура системи
3. Ієрархія систем. Зовнішнє середовище
4. Класифікація систем

1. Усі відомі на даний час матеріальні об'єкти та процеси реального світу так або інакше включені до пізнавальної або практичної діяльності людини, що обумовлює необхідність їх наукового вивчення.

**Об'єкт** – те, на що спрямовано пізнавальну або іншу діяльність людини.

**Суб'єкт** – індивід або соціальна група, що активно діє та пізнає, володіє свідомістю та волею.

Диференціація (розділення) суб'єктів та об'єктів є відносною. У ряді випадків суб'єкт пізнавальної або іншої діяльності може бути об'єктом для іншого індивіда (соціальної групи). Існують випадки, коли суб'єкт та об'єкт діяльності співпадають.

Об'єкти реального світу знаходяться у постійній взаємодії між собою, так або інакше взаємопов'язані одне з одним. Найбільш розповсюдженою формою існування взаємопов'язаних та взаємодіючих об'єктів є система.

**Система** – сукупність елементів, які знаходяться у відношеннях між собою та утворюють певну цілісну єдність, спрямовану на досягнення єдиної мети.

Для системи характерна наявність *зв'язків* та *відношень* між утворюючими її *частинами*, а також нерозривну єдність із *середовищем*, у взаємовідношеннях з яким система проявляє свою **цілісність**. Зв'язки та відношення між елементами систем носять відносно постійний характер.

2. При дослідженні складу систем прийнято розрізняти елементи, компоненти та підсистеми.

**Елемент** системи – найпростіша неподільна частина системи, тобто межа поділення системи з точки зору вирішення конкретних задач у рамках певної мети.

**Підсистема** – відносно незалежна частина системи, яка володіє властивостями системи та має підмету, на досягнення якої орієнтована підсистема. Якщо частини системи не володіють такими властивостями, а представляють собою сукупність однорідних елементів, то такі частини називають **компонентами**.

Сукупність елементів, компонентів і підсистем називають складом системи.

Зв'язок – обмеження ступеня свободи елементів, компонентів і підсистем системи.

Сукупність зв'язків між частинами системи називають структурою системи.

Зв'язки забезпечують виникнення та збереження цілісних властивостей системи, а також характеризують будову та функціонування системи - статику і динаміку. Чим сильніше зв'язку між елементами системи, тим більш цілісні властивості вона проявляє.

За своїм характером зв'язку характеризуються

- напрямком - бувають напружені і ненапружені;
- силою, що вимагає побудови шкали зв'язків
- видом.

По виду зв'язку поділяють на зв'язку підпорядкування, зв'язку породження, зв'язку управління, зв'язку байдужості. Важливу роль в процесі управління системами грають зворотні зв'язки.

Зворотній зв'язок - зворотний вплив керованого процесу на керуючий об'єкт.

Зворотній зв'язок - основа саморегулювання розвитку систем. Зворотній зв'язок дозволяє по вихідним параметрам визначати вхідні.

Відображення системи виробляють шляхом розчленування її на підсистеми, компоненти, елементи із зазначенням взаємозв'язків різного характеру. Одна і та ж система може бути представлена різними структурами в залежності від стадії пізнання об'єктів або в залежності від аспектів її розгляду і цілі створення.

Поведінка системи - процес її переходу з одних станів в інші в конкретні моменти часу.

Розвиток системи - зміна її в часі для досягнення поставленої мети.

3. Повне дослідження поведінки системи неможливо без розгляду її взаємозв'язку і взаємодії із зовнішнім середовищем, в якому функціонує зазначена система. Зовнішнє середовище - система вищого порядку по відношенню до даної системи (розглянута система є елементом або підсистемою зовнішнього середовища).

Зовнішнє середовище впливає на дану систему, змінює її параметри і властивості, впливає на її поведінку. Однак і система, в свою чергу, впливає на зовнішнє середовище.

Сучасні наукові дані дозволяють говорити про світ як про нескінченної системи, що знаходиться в розвитку і на різних стадіях розвитку і на різних рівнях системної підпорядкованості - ієрархії.

4. Щоб визначити місце системи в світі, необхідно не тільки виділити зовнішню по відношенню до неї середу, але і віднести її до певного класу об'єктів або процесів. Як відомо, класифікація - логічне (уявне) поділ об'єктів за певною ознакою або критерієм.

Системи реального світу класифікують за

Походженням: природні, штучні і біологічні;

Ступеня складності: прості, складні і великі (дуже складні);

Ступеня взаємодії з іншими системами: відкриті і замкнуті;

Характеру функціонування: стохастичні і детерміновані;

Принципом роботи: дискретні, безперервні і дискретно-безперервні;  
Фізичну природу: реальні і абстрактні (як правило, системи інформації);

Ступеня цілісності: суммативна і цілісні;

Характеру існування: статичні і динамічні.

Прості системи - системи, елементи яких точно кількісно співмірні.  
Елементи простих систем є її найпростіші неподільні частини.

Складні системи - системи, в яких складові їх елементи є, в свою чергу, системами. Для великих систем характерна наявність великої кількості різномірних частин, потужні інформаційні потоки і самоорганізація.

Поняття простих і складних систем щодо і може бути застосовано в контексті питання.

Відкриті системи активно взаємодіють з іншими системами і зовнішнім середовищем, обмінюючись з ними речовиною, енергією та інформацією. Замкнені системи наглухо ізольовані своїми непроникними кордонами і функціонують виключно за рахунок внутрішніх потоків. Такі системи приречені в результаті на руйнування.

Слід ще раз відзначити: щоб визначити місце системи в світі, необхідно не тільки виділити її зв'язку з іншими системами, а й охарактеризувати її з точки зору класифікації - визначити її тип.

## **Резюме**

1. Система - основна форма існування взаємопов'язаних і взаємодіючих об'єктів і процесів реального світу. Цілісність системи обумовлюють зв'язку між її частинами - елементами, компонентами або підсистемами.

2. Система характеризується складом (частинами, які в неї входять) і структурою (набором зв'язків між її частинами).

3. Для визначення місця системи в світі необхідно, по-перше, виділити її зв'язку з іншими системами і зовнішнім середовищем, по-друге, визначити її тип відповідно до прийнятої класифікації. В даний час системи класифікують за 8 основними ознаками.

## **Лекція 2. Цілі і критерії**

### **План**

1. Проблеми та проблематика
2. Мета як зворотна сторона проблеми
3. Критерії як кількісні характеристики цілей

1. Будь-яка усвідомлена діяльність спрямована на подолання невідповідності між бажаним і дійсним, тобто на досягнення мети.

Невідповідність фактичного і бажаного стану системи називають проблемою.

Сукупність усіх проблем утворює проблемну середу. Систему взаємопов'язаних проблем називають проблематикою.

Таким чином, проблема - суперечлива ситуація, що вимагає дозволу. Проблема об'єктивна, її сприйняття суб'єктивно. Дозволом протиріччя є досягнення мети.

2. Мета - стан системи, що є найкращим в плані логічного досягнення. Мета являє собою бажаний стан системи, яке нерідко не збігається з фактичним (дійсним).

Мета є зворотною стороною проблеми.

Формулювання проблем і відповідно формулювання мети і завдань є найважливішим етапом в побудові і аналізі систем. Важливим етапом є процес визначення цілей підсистем, що підкоряється наступним правилам:

- цілі системи нижчого рівня повинні бути підпорядковані цілям систем вищого рівня з урахуванням динаміки розвитку;
- аналіз характеру розташування цілей в різних областях простору дозволяє визначити функціональні вимоги до системи;
- невизначеність поведінки системи ставить вимогу обліку можливих ситуацій при її формуванні в інтересах розвитку;
- досяжність мети залежить від витрат ресурсів на її виконання.

Формування цілей багато в чому залежить від системи цінностей суб'єкта. Цінність являє собою уявлення про бажане. При виборі цілей і клієнт, і особа, яка приймає рішення повинні узгоджувати свої системи цінностей, тобто шукати спільні цінності.

Розрізняють 2 основних типи систем цінностей - технократическую і гуманістичну (табл. 1).

Табл. 1. Системи цінностей

<b>Технократична</b>	<b>Гуманістична</b>
Необмеженість природних ресурсів	Обмеженість природних ресурсів
Перевага над природою	Гармонія з природою
Інформаційно-технологічний розвиток	Соціально-культурний розвиток
Ринкові відносини	громадські інтереси
Ризик і виграш	Гарантія безпеки
Розумність засобів	розумність цілей
запам'ятовування	розуміння
освіта	Культура

Система цінностей зсувається. З огляду на, що проблеми не можна відривати від проблематики, мета ніколи не буває єдиною.

Досягнення цілей і рішення задач можливо лише на основі усвідомленої цілеспрямованої діяльності.

3. Досягнення мети можна описати кількісно. Для цього формують критерії.

Критерії – оціночні кількісні показники, що характеризують ступінь досягнення мети.

Досягнення мети нерідко багатоаспектно (багатогранно) і внаслідок цього описується не одним, а кількома критеріями - системою (набором) критеріїв. До неї висувають такі вимоги: Операційна (повинна чітко вказувати шлях до досягнення мети і давати можливість кількісної або якісної оцінки), функціональна повнота (повинна описувати всі аспекти мети), ненадмірність (критерії не повинні дублювати один одного), детермінованість (кожен критерій повинен мати однозначний сенс і характеризувати певний аспект мети) і т.д.

### **Резюме**

1. Системоутворюючим фактором є мета - бажаний стан об'єкта. Будь-яка діяльність спрямована на вирішення проблеми - подолання розриву між бажаним і фактичним станом системи.

2. Цілі, також як системи, ієрархічні. Глобальну мету називають місією, підлеглі - завданнями.

3. Будь-яка мета багатоаспектна і може бути кількісно або якісно оцінена системою критеріїв, до яких висувають певні вимоги.

### **Резюме до розділу 1**

1. Реальний світ являє собою нескінченну ієрархічну систему. Всі об'єкти і процеси реального світу також являють собою системи. Діяльність і мислення людини також системні.

2. Система характеризується складом, структурою, зовнішніми зв'язками (з іншими системами і зовнішнім середовищем), типом і цілями існування (функціонування). Системоутворюючим фактором є мета.

3. Будь-яка діяльність спрямована на вирішення проблем і досягнення цілей. Досягнення цілей можна описати кількісно. Цілі і відповідні їм критерії, також як і системи, ієрархічні.

## **Розділ 2. Моделювання та його види**

### **Лекція 3. Методи пізнання дійсності**

#### **План**

1. Логічна схема пізнання дійсності
2. Методи пізнання дійсності як способи отримання знань
  - 2.1. Спостереження
  - 2.2. Експеримент

## 2.3. Вимірування

1. Всі ми живемо в реальному світі, діємо в ньому. Для усвідомленої, доцільною діяльності людині необхідна об'єктивна інформація про світ, про дійсність (її частинах) - діяльність людини не може будуватися на суб'єктивних ілюзіях.

Наприклад, лікар може лікувати хворого (усвідомлена цілеспрямована діяльність!), Лише знаючи закони функціонування людського організму, закономірності виникнення та розвитку хвороби (наявність інформації!).

Для отримання інформації про дійсність її необхідно пізнавати.

ПІЗНАННЯ - процес творчої діяльності людей, яка формує їх знання, на основі яких виникають ЦІЛІ, МОТИВИ І РЕЗУЛЬТАТИ людських дій.

Отримувати інформацію про дійсність (пізнавати дійсність) можливо різними МЕТОДАМИ.

МЕТОД - шлях (спосіб) досягнення мети, певним чином упорядкована діяльність.

МЕТОД ПІЗНАННЯ - спосіб пізнання дійсності, отримання інформації про неї.

Пізнаючи дійсність, ми повинні знати, що ми хочемо вивчити.

Об'єкт дослідження (пізнання) - явище або предмет, що піддається дослідженню. Відносно об'єкта дослідження необхідно завжди пам'ятати, що він виступає як дане, то, що є, а предмет - це те, що ми шукаємо, встановлюємо. Будь-який об'єкт дослідження - це сукупність властивостей і відносин, яка існує незалежно від дослідника, але враховується ім.

ПРЕДМЕТ дослідження - частина об'єкта дослідження, той аспект, та точка зору, з якої ми пізнаємо об'єкт. Предмет дослідження - аспект об'єтов, на який спрямоване вістря думки (ті боку, ті властивості об'єкта, які ми пізнаємо). Необхідно пам'ятати, що один і той же об'єкт може бути предметом багатьох досліджень. Визначення предмета дослідження встановлює межі пошуку, не дозволяє розпорошувати сили і засоби на дослідження, конкретизує його.

Наприклад, людина - об'єкт дослідження і акмеології, і медицини. Однак предмет дослідження медицини - хвороби людини, предмет дослідження акмеології - досконалість людини.

2. В даний час існує безліч методів пізнання (дослідження) дійсності: аналіз літературних даних, спостереження, експеримент, вимірювання, метод експертних оцінок, тестування, опитування (анкетування), аналіз передового практичного досвіду, моделювання і т.д. Розглянемо найбільш поширені.

Спостереження (моніторинг) - один із старих і випробуваних методів дослідження дійсності.

Спостереження - планомірне і цілеспрямоване сприйняття досліджуваного об'єкта (предмета або процесу), результати якого в тій чи іншій формі фіксуються дослідником.

Спостереження відрізняє невтручання в досліджуваний процес.

Наприклад, декан приходить на заняття і спостерігає навчальний процес. Об'єкт дослідження (спостереження) - педагогічний процес, предмети дослідження (спостереження): 1 - інформація, передана які навчаються (студентам), 2 - характер взаємин викладача і студентів.

Експеримент - відтворення і зміна явища з метою вивчення його в найбільш сприятливих умовах.

Характерними рисами експерименту є заплановане втручання дослідника в досліджуване явище (процес) шляхом введення експериментального стимулу, можливість багаторазового відтворення досліджуваного явища в стандартизованих умовах або планомірного їх зміни (варіювання).

Наприклад, поміщаючи собаку в клітку, втручаються в процес поведінки тварини. Об'єкт дослідження (експерименту) - собака, предмет дослідження (експерименту): її поведінка.

Саме метод експерименту дозволяє розкласти досліджуване явище на складові елементи або частини. Змінюючи умови функціонування цих частин і елементів, дослідник отримує можливість виявляти і простежувати їх розвиток і точно фіксувати отримані результати. Експеримент і практика - останні інстанції в затвердженні або запереченні будь-яких припущень, гіпотез. Експеримент слід вважати вдалим і в разі підтвердження гіпотези, і в разі її заперечення.

При проведенні експерименту дослідник завжди повинен бути стурбований дією побічних (супутніх) стимулів (факторів). Ця сторона експерименту є однією з найбільш відповідальних у правомірності майбутніх результатів дослідження (пізнання).

Вимірювання є універсальним і загальним методом досліджень у всіх видах діяльності людини. Є підстави стверджувати, що наука починається там, де починаються виміру.

Вимірювання - встановлення відповідності між явищами, що вивчаються, з одного боку, і числами, з іншого.

Вимірювання - пізнавальна процедура, здійснювана на емпіричному рівні наукового дослідження і включає визначення характеристик матеріальних об'єктів за допомогою відповідних вимірювальних приладів (систем).

Наприклад, вимірювання маси спортсмена - визначення його фізичної характеристики (маси тіла) за допомогою ваг.

Будь-яке вимірювання в кінцевому рахунку зводиться до порівняння вимірюваної величини з деякою однорідної з нею величиною, прийнятої за зразок (одиниці). За допомогою тієї чи іншої системи одиниць вимірювання дається кількісний опис властивостей тіл, що становить важливий елемент пізнання. Вимірювання підвищує ступінь точності знання.

Наприклад, загальновідомо, наскільки важливо точне знання зусиль спортсмена, що додаються їм для подолання тренувального навантаження: це дозволяє передбачити функціональний стан його організму після тренування і функціональні зрушення (зміна морфофункціональних характеристик і т.д.),



а також дозувати тренувальне навантаження, не допустити перевантаження організму в процесі тренування.

Вимірювання є підсилює моментом філософського методу - порівняння.

Однак слід враховувати, що ніяке вимір не може бути виконан абсолютно точно. Результат вимірювання неминуче містить похибка, величина якої тим менше, чим точніше метод вимірювання і вимірювальний прилад.

З одного боку, точність вимірювання обмежена найменшим значенням величини, яке можна визначити за допомогою вимірника (ціною поділки приладу).

Очевидно, що чим точніше вимірювана величина (тобто чим менше похибка її вимірювання), тим ціннішими є результати вимірювань. Знання цінно в тій мірі, в якій воно достовірне. Чим точніше вимірювання, тим більше придатні отримані дані для їх подальшого використання. Чим менше похибка вимірювання, тим менше діапазон невизначеності знання значення величини, а мета вимірювань - зменшити цей діапазон. Але разом з тим існує максимально допустима похибка вимірювань - величина похибки, при перевищенні якої результати вимірювання непридатні для їх подальшого використання. Її значення розраховують фахівці (вимоги, що пред'являються до точності вимірювань, залежать від типу розв'язуваної задачі).

Проте і спостереження, і експеримент, і багато інших методів пізнання дійсності (вимір і т.і.) мають ряд принципово непереборних недоліків:

1. Не дозволяють досліджувати об'єкти (предмети або процеси), яких не існує в дійсності.

2. Не дозволяють досліджувати об'єкти, існуючі в дійсності, але недоступні дослідникові.

Цих та ряд інших недоліків позбавлений найбільш зручний і універсальний метод пізнання дійсності - моделювання.

## Резюме

1. Для діяльності людини необхідна об'єктивна достовірна інформація про об'єкти, включених до сфери його діяльності, яку можливо отримати різними методами (шляхами пізнання).

2. Найбільш поширеними методами дослідження в даний час є аналіз літературних джерел і документальних даних, вимір і його різновиди (тестування і метод експертних оцінок), опитувальні методи, спостереження, експеримент і моделювання.

3. Кожен метод отримання інформації (метод дослідження, пізнання дійсності) володіє як достоїнствами, так і недоліками, тому обрані методи повинні бути адекватні завданням дослідження.

## Лекція 4. Моделювання як метод пізнання

### План

1. Моделювання як спосіб отримання знань і його особливості
2. Моделі як логічні конструкти
3. Адекватність моделі дійсності
4. Класифікація моделей

1. Моделювання - відтворення характеристик деякого об'єкта на іншому об'єкті, спеціально створеному для їх вивчення, - моделі.

Потреба в моделюванні виникає тоді, коли дослідження безпосередньо самого об'єкта важко (а в ряді випадків - неможливо), дорого, вимагає тривалого часу. Між моделлю та об'єктом, що цікавлять дослідника, має існувати відоме подібність. Модель - щось універсальне, хоча і реалізоване різними способами, тобто модель є спосіб існування знань.

Створення моделей переслідує 2 типу цілей - познавательская і прагматичну.

Познавательская мета моделювання - отримання форм організації та подання знань засобами з'єднання нових знань з наявними.

Прагматична мета моделювання - розробка засобів управління, засобів організації та практичної діяльності шляхом подання зразково-правильних дій.

Познавательская і прагматична мети використання моделей взаємопов'язані. Досягнення познавательская цілей моделювання - необхідна передумова досягнення прагматичних цілей.

Пізнання предметів і явищ навколишнього світу і пізнавальні процеси є системами і оперують можливістю аналізу і синтезу.

Суть аналізу полягає в поділі цілого на частини, тобто уявлення складних систем у вигляді простих компонентів.

Однак для узагальнення знань необхідний зворотний процес, який називають синтезом. Синтез відповідає на питання: які повинні бути параметри системи або процесу, щоб її функціонування відповідало заданим вимогам.

Аналіз і синтез відображені також в науках, які ми вивчаємо.

Приклад. Такі науки, як фізика, біологія, біомеханіка характеризують аналітичність людських знань, в число синтетичних наук відносять філософію, математику, теорію систем, кібернетику.

Моделювання як метод теоретичного дослідження виконує 3 основні функції.

1. Каузальна (пояснювальна) функція полягає в поясненні поведінки досліджуваного об'єкта (системи), пошуку закономірностей функціонування системи. Ця функція моделювання пов'язана з аналізом системи.

2. Прогностична (предсказательная) функція полягає в прогнозуванні поведінки системи або процесу при різних впливах (як детермінованих, так і

випадкових). Розрізняють пошуковий прогноз (оцінка майбутніх станів системи при збереженні існуючих тенденцій) і нормативний прогноз (пошук необхідної послідовності дій, що переводить систему з початкового стану в бажане).

3. проектує функція - проектування системи або процесу з оптимальними або необхідними характеристиками. Ця функція моделювання зазвичай пов'язана з вирішенням задачі синтезу системи або процесу.

Однак функції моделювання взаємопов'язані. Якщо завдання розбивають на етапи-підзадачі, вирішення яких реалізує різні функції моделювання, то вихідна інформація попереднього етапу - вхідна для подальшого.

Мислення людини є також системним і, як природний процес, є внутрішнім для людини, що впливають з системності світу.

2. В основі моделювання об'єктів (систем) реального світу лежить теорія подібності, метою якої є визначення подібності та відмінності між об'єктами і системами. Абсолютна подоба можливо відповідно до цієї теорії лише при заміні одного об'єкта іншим точно таким же. При моделюванні систем, як правило, абсолютна подібність не має місця, досліджуваний об'єкт замінюється іншим об'єктом - моделлю, який з достатнім ступенем точності відображає сутність функціонування досліджуваного об'єкта.

3. БУДЬ-ЯКА МОДЕЛЬ ЗАВЖДИ БІДНІШІ РЕАЛЬНОГО ЯВИЩА, ЦЕ - ЇЇ ФУНДАМЕНТАЛЬНА ВЛАСТИВІСТЬ.

При побудові моделі ми не можемо врахувати всі чинники, що впливають на поведінку системи або процесу. Звідси випливає, що при моделюванні неминуче відхилення фактичних параметрів системи (процесу) від розрахованих.

Адекватність моделі - її відповідність реальному об'єкту (або процесу).

Якщо за допомогою моделі добиваємося поставленої мети, то говоримо: модель адекватна дійсності.

Похибка моделювання - різниця між розрахованим і фактичним значенням параметра досліджуваної системи або процесу:

$D = |P(\text{fact}) - P(\text{model})|$  - абсолютна похибка

$E = 100\% * D / P(\text{fact})$  – відносна похибка.

**Приклад.** Для нагріву кімнати спалюють дрова з теплоутворюючою здатністю  $Q = 10000000$  Дж/кг. Визначити, яку масу дров  $M$  необхідно спалити, щоб нагріти повітря у кімнаті теплоємністю  $C = 2000000$  Дж/кг з температури  $T_1 = 280$  К до температури  $T_2 = 310$  К? Визначити адекватність моделі дійсності, якщо для нагріву кімнати знадобилось  $N = 6,5$  кг дров.

**РІШЕННЯ.**

Необхідна кількість теплоти для нагріву повітря  $W = C * (T_2 - T_1) = 2000000 * (310 - 280) = 60000000$  Дж. Кількість дров, яку необхідно спалити для одержання такої кількості теплоти,  $M = W / Q = 60000000 / 10000000 = 6$  кг. Адекватність моделі дійсності:

$E = 100\% * (6,5 - 6) / 6,5 = 8,5\%$ .

Чим менше похибка моделювання, тим більше адекватна модель дійсності.

Похибка моделювання виникає через неврахування ряду факторів або через неповноту знань об'єкта моделювання.

Очевидно, що чим більше факторів буде враховано при побудові моделі, тим точніше вона буде. Однак виникає протиріччя: врахувати мало факторів - модель буде неточною, врахувати багато чинників - модель буде занадто складною. **ВИХІД НАСТУПНИЙ:** враховувати фактори, в **НАЙБІЛЬШОЮ** ступеня впливають на поведінку системи (процес).

**Приклад.** При вирішенні завдань на вільне падіння тіл ми зазвичай не враховуємо опір атмосфери, тому що при невеликих швидкостях падаючого тіла він відносно невеликий (згадайте курс фізики! - шкільний!). Однак при значних швидкостях воно велике, і його не можна не враховувати (згадайте падіння парашутиста з великої висоти).

4. В даний час моделі класифікують за такими ознаками.

1. За ступенем повноти моделі з точки зору теорії подібності:

а) Повний подобу - відповідає повному моделюванню як в часі, так і в просторі.

б) Неповне подобу - звертає увагу тільки на найбільш суттєві, характерні параметри досліджуваного об'єкта.

в) Наближене подобу - має місце наближене подобу, коли цілий ряд показників не моделюється зовсім.

2. За ступенем обліку вихідної інформації:

а) Детерміновані моделі - відображають процеси, в яких передбачають відсутність випадкових впливів.

б) Стохастичні моделі - відображаються імовірнісні процеси і події. В цьому випадку аналізують реалізації випадкових процесів і оцінюють середні характеристики.

3. З точки зору зміни об'єкта в часі:

а) Статичні моделі - описують поведінку об'єкта в якийсь момент часу.

б) Динамічні моделі - описують зміна об'єкта в часі.

4. З точки зору описуваних процесів:

а) Дискретні моделі - відображають опис дискретних систем.

б) Безперервні моделі - відображають опис безперервних систем.

в) дискретно-безперервні моделі - описують системи, що включають в себе як безперервні, так і дискретні компоненти.

**Найбільш поширена класифікація - з точки зору представлення об'єкту в певній формі:**

а) Реальне моделювання - ЗАМІНА ДОСЛІДЖУВАНОВОГО ОБ'ЄКТА РЕАЛЬНИМ (матеріальних) ОБ'ЄКТОМ.

б) Уявне моделювання - ЗАМІНА ДОСЛІДЖУВАНОВОГО ОБ'ЄКТА абстрактні (СИСТЕМОЮ ІНФОРМАЦІЇ).

**Приклад.** Макет лижної траси - реальна модель (матеріальний об'єкт), а ось креслення будівлі - уявна модель (креслення - це система графічної інформації).

Уявне моделювання в ряді випадків є єдиним способом моделювання об'єктів.

## Резюме

1. Моделювання є найбільш поширеним і універсальним методом пізнання дійсності, методологічною базою аналізу і синтезу систем.

2. Сутністю моделювання є вивчення певних аспектів реального об'єкта на об'єкті-заміннику. В даний час моделі класифікують за 5 основними ознаками.

3. Модель як об'єкт-замінник завжди бідніше реального об'єкта чи явища, і користуватися нею можна тільки в тому випадку, якщо вона адекватна дійсності. Щоб модель була адекватною дійсності, необхідно при її побудові враховувати найбільш суттєві чинники функціонування системи.

## Лекція 5. Види моделювання

### План

1. Реальне моделювання
2. Уявне моделювання
3. Математичне моделювання як особливий вид уявного моделювання
  - 3.1. Аналітичне моделювання
  - 3.2. Імітаційне моделювання
  - 3.3. Комбіноване моделювання

1. Найбільш поширена класифікація - з точки зору представлення об'єкту в певній формі: реальне і уявне моделювання.

Реальне моделювання - ЗАМІНА ДОСЛІДЖУВАНОВОГО ОБ'ЄКТА РЕАЛЬНИМ (матеріальних) ОБ'ЄКТОМ.

2. Уявне моделювання - ЗАМІНА ДОСЛІДЖУВАНОВОГО ОБ'ЄКТА абстрактні (СИСТЕМОЮ ІНФОРМАЦІЇ).

Уявне моделювання в ряді випадків є єдиним способом моделювання об'єктів.

Уявне моделювання, в свою чергу, класифікують на наочне, символічне і математичне.

3. Математичне моделювання - найбільш універсальний і зручний спосіб опису об'єктів і систем Реал світу.

Математична модель - об'єкт, побудований в результаті встановлення даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, а зазначений процес - математичним моделюванням.

Математичними об'єктами можуть бути числа, рівняння, формули, графіки, числові таблиці і т.д.

Математичні моделі поділяють на аналітичні, імітаційні і комбіновані.

Аналітичне моделювання - представлення процесів функціонування систем або процесів в вигляді деяких функціональних співвідношень.

Аналітичні методи моделювання застосовні для порівняно простих систем або при істотному спрощення процесу при побудові моделі.

За своєю суттю аналітична модель - взаємозв'язок між факторами-детермінантами функціонування системи або процесу і величинами-відгуками (залежними величинами). АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ - СИСТЕМА ІНФОРМАЦІЇ.

При аналітичному моделюванні досліджувану систему або процес замінюють (можуть замінити) функціональними таблицями, графіками, рівняннями, системами рівнянь, формулами, системами формул і т.і.

**Приклад.** Тіло вільно падає з висоти без початкової швидкості. Яку відстань пролетить тіло за  $t=7$  с, якщо прискорення вільного падіння  $g=9,8\text{м}/(\text{с}^2)$ ? РІШЕННЯ – аналітична модель  $s=0,5*g*t*t$ ,  $s$  – пройдений шлях (залежна величина, змінна-відклик),  $g$  (прискорення) та  $t$  (час руху) – фактори-детермінанти.

**Приклад.** Для нагріву кімнати спалюють дрова з теплоутворюючою здатністю  $Q=10000000$  Дж/кг. Визначити, яку масу дров  $M$  необхідно спалити, щоб нагріти повітря у кімнаті теплоємністю  $C=200000$  Дж/кг від температури  $T_1=280$  К до температури  $T_2=310$ К? Рішення – система формул:  $W=C*(T_2-T_1)$ ,  $M=W/Q$

Тут:  $W$  – кількість енергії, необхідне для нагрівання повітря. Дана інформація - проміжна в аналітичній моделі.

Для складних систем використовують методи імітаційного моделювання.

Імітаційне моделювання - реалізація моделі у вигляді алгоритму - процесу функціонування системи в часі.

Для складних систем або процесів імітуються елементарні явища, що становлять процес, зі збереженням їх логічної структури і послідовності протікання в часі, що дозволяє за вихідними даними отримати відомості про стан процесів в певні моменти часу, що дає змогу оцінити характеристики системи.

При імітаційному моделюванні реалізацією моделі є алгоритм, що дозволяє отримати результати на основі дослідження і опису окремих елементарних об'єктів і подій.

Імітаційне моделювання дозволяє досліджувати як завгодно складні системи і досить просто враховувати наявність як дискретних, так і безперервних елементів, нелінійні характеристики і випадкові впливи. У ряді випадків імітаційне є єдино можливим методом дослідження системи на етапі її проектування.

Метод імітаційного моделювання дозволяє вирішувати завдання аналізу великих систем, таких як оцінку варіантів структури системи, оцінку

ефективності різних алгоритмів управління, оцінку впливу зміни різних параметрів системи. У ряді випадків виникає необхідність створення системи з заданими характеристиками, оптимальною за деякими критеріями з урахуванням ряду обмежень (задачі оптимізації). Такі завдання - завдання структурного алгоритмічного і параметричного синтезу систем - також вирішують методом імітаційного моделювання.

За своєю суттю імітаційна модель - відстеження функціонування системи або процесу в часі. Визначають моменти часу, в які збираються відстежувати поведінку системи або процесу, а також параметри, відстеження яких призведе до вирішення завдання. Імітаційна модель – взаємодозначна відповідність моментів часу і миттєвих значень параметрів  $G$  системи або процесу у дані моменти:

$$G=G(t)=G(t[0], t[1], \dots, t[n]).$$

Тут:  $n$  – число моментів часу, за які відстежують процес або систему.

**ПРИМЕР.** Тіло вільно падає з великої висоти без початкової швидкості. Яку відстань пролетить тіло за  $t=0,8$  с, якщо прискорення вільного падіння  $g=9,8$ м/(с\*с)? Рішення - аналітична модель  $s=0,5*g*t*t$ ,  $s$  – пройдений шлях (залежна величина, змінна-відклик),  $g$  (прискорення) та  $t$  (час руху) – фактори-детермінанти. Проте, задачу можна вирішити методом імітаційного моделювання:

Момент часу, с	Прискорення вільного падіння	Миттєва швидкість	Приріст швидкості	Пройдений шлях за проміжок часу (t[i-1] – t[i])	Пройдений шлях з початку руху
0	9,8	0	=9,81 *(0,2-0) =1,96	=0*(0,2-0) =0	0
,2	9,8	=0+1,96	=9,81 *(0,4-0,2) =1,96	=1,96* (0,4-0,2) =0,392	=0+0,392
,4	9,8	=1,96 + 1,96 =3,92	=9,81 *(0,6-0,4) =1,96	=3,92*(0,6-0,4) =0,784	=0,392+ 0,784 =1,176
,6	9,8	=3,92 + 1,96 =5,88	=9,81 *(0,8-0,6) =1,96	=5,88* (0,8-0,6) =1,176	=1,176+ 1,176 =2,352

,8	0	9,8	=5,88	=9,81	=	=2,352+
	1		1,96	(1,0-	7,84*(1,0-	1,568
			=7,84	0,8)	0,8)	=3,92
				=1,96	=1,568	
,0	1					

Відповідь: 3,92 м. У цьому завданню падіння тіла (процес) відстежили за 5 моментів часу, що відслідковують параметри: пройдений шлях з початку руху - інформативний, інші - проміжні, однак без їх знання неможливо знання інформативного.

Однак деякі завдання можливо вирішити і методом аналітичного моделювання. Імітаційне моделювання часто незамінне в тих випадках, коли наступні стану системи або процесу залежать від попередніх.

**Комбіноване моделювання** поєднує методи аналітичного та імітаційного моделювання і служить для опису систем, що включають в себе як частини, які можливо описати аналітично, так і частини, що описуються засобами імітаційного моделювання. Рішення завдання розбивають на етапи-підзадачі, які вирішуються або методом аналітичного, або методом імітаційного моделювання. При цьому вихідна інформація попереднього етапу - вхідна інформація для подальшого.

### Резюме

1. Уявне моделювання в більшості випадків є єдиним способом вивчення об'єктів і процесів.

2. Найбільш зручною формою опису систем реального світу є математична модель. Однак математичне моделювання можна застосувати лише в тих випадках, коли об'єкт піддається формалізації (математизації), а це, як правило, порівняно прості системи.

3. Оскільки будь-яка система існує в часі, то найбільш універсальним методом математичного моделювання є імітаційне. Імітаційна модель відображає зміну об'єкта або процесу в часі.

### Лекція 6. Основні етапи побудови математичних моделей

#### План

1. Концептуальна модель системи
2. Виділення параметрів
3. Алгоритмізація моделі

Формулювання проблеми, постановка цілей та задач моделювання - найбільш відповідальний етап дослідження. На даному етапі надзвичайно важливо сформулювати систему критеріїв - оціночних параметрів, що



характеризують якість досягнення мети. Набір критеріїв повинен бути функціонально повним (здатним давати інформацію про ступінь досягнення мети), розкладені, що не надмірною (критерії не повинні дублювати один одного), мінімальним.

Основні вимоги до моделі:

1. Повнота - властивість, що полягає в отриманні необхідного набору оцінок характеристик системи.
2. Гнучкість - здатність моделі сприймати різні ситуації, оновлювати дані, переходити до інших модифікацій.
3. Облік ресурсів і обмежень на них.
4. Можливість інформаційного забезпечення.
5. Максимальна відповідність програмного і технічного забезпечення для ефективної реалізації моделі.
6. Блочність структури і можливість зміни.
7. Цілеспрямованість машинних експериментів.

При отриманні нової інформації про об'єкт (системі) модель повинна переглядатися і уточнюватися - процес моделювання є ітеративним.

Дуже важливий етап підготовки машинних моделей - побудова концептуальної (змістовної) моделі системи. Концептуальна модель є перехідною формою від змістовного опису об'єкта до його математичної моделі. На даному етапі систему і її функціонування розбиваю на піделементи і підпроцеси, які можна змістовно описати.

Поділ системи на блоки провадять таким чином, щоб кожен блок був досить автономним (відносно самостійним) і кількість зв'язків між блоками було мінімальним.

Після цього виробляють математичний опис і будують математичні моделі окремих блоків, потім - опис системи в цілому з урахуванням зв'язків між блоками і впливу навколишнього середовища.

2. Після побудови концептуальної моделі визначають величини, що характеризують процес функціонування системи (ендогенні змінні), величини, що характеризують дії, що управляють і впливу навколишнього середовища (ендогенні змінні), параметри системи і початкові умови.

Параметри системи - величини, які оператор, який працює на моделі, може вибирати довільно.

Параметри після їх визначення стають постійними.

Таким чином, параметри - внутрішні (іманентні) характеристики самої системи.

Екзогенні змінні - вхідні змінні, які породжуються поза системою і є результатом впливу зовнішніх причин.

Ендогенні змінні - вихідні змінні - змінні станів, які породжуються безпосередньо системою в результаті впливу внутрішніх причин.

Процес функціонування детерменірованої системи мають вигляд:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}_0, \mathbf{X}, t).$$

$$\mathbf{Z} = \{ \mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n \}$$

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m \}$$

Тут:  $\mathbf{X}$  – вхідні змінні моделі;  $\mathbf{Z}$  – вихідні перемінні моделі;  $t$  - час (момент часу);  $\mathbf{Z}_0$  – початкові умови функціонування системи.

Процес функціонування стохастичної системи має вигляд:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}_0, \mathbf{X}, \mathbf{h}, t).$$

$$\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$$

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$$

$$\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$$

Тут:  $\mathbf{h}$  – випадкові впливи.

3. Процес імітаційного моделювання здійснюють з організацією квантування за часом, яке називають системним часом. Величина кванта часу повинна бути досить мала, щоб моделюється був адекватний досліджуваного процесу.

Алгоритм імітаційної моделі будують за наступним принципом:

$$\{Z = (Z(t_0), Z(t_0 + \Delta t), Z(t_0 + 2 * \Delta t), \dots, Z(t_0 + L * \Delta t), \dots)\}$$

Тут:  $t_0$  - початковий момент часу;  $\Delta t$  – крок квантування у часі;  $t_0 + L * \Delta t$  - кінцевий момент часу.

Таким чином, імітаційна модель відображає зміну стану системи в часі, а результат роботи алгоритму, що реалізує модель, - значення досліджуваних параметрів стану системи в цікавлять оператора моменти часу.

Процес функціонування стохастичною системи  $S$  на інтервалі часу від 0 до  $T$  моделюється  $n$ -кратно ( $n$ -число моментів часу) з отриманням незалежних реалізацій. При цьому розрізняють 3 типи циклів. Цикл А називають внутрішнім циклом. В даному циклі здійснюють моделювання процесу функціонування системи на інтервалі часу від 0 до  $T$ . Цикл В - проміжний, організовує  $n$ -кратне повторення прогону моделі для подальшої статистичної обробки. Число реалізацій (кількості прогонів циклу В) визначають по заданій точності і достовірності моделювання системи. Цикл С - управління послідовністю моделювання варіантів поведінки системи  $S$ . Організовує пошук оптимальних структур системи, її алгоритмів функціонування і параметрів. Є оптимізуючим блоком.

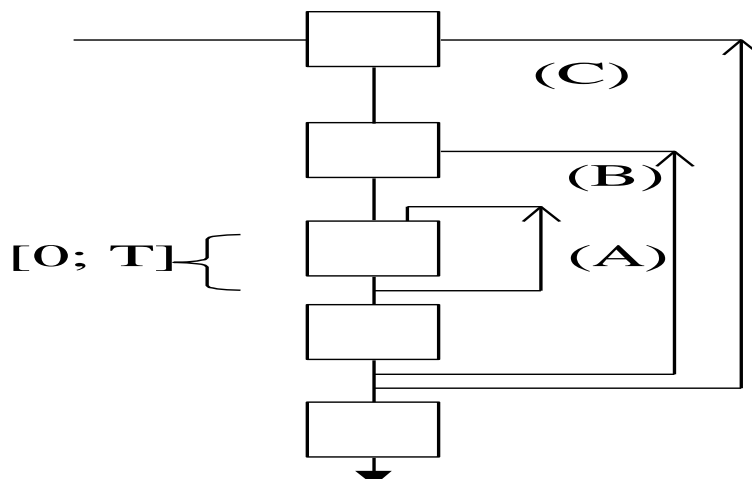


Рис. 1. – Цикли моделі.

Однак дана схема характерна для імітаційних моделей стохастичних систем. Залежно від ступеня обліку інформації та форми представлення об'єкта дана схема буде змінюватися. Наприклад, для детермінованих моделей не характерний цикл В, для аналітичних моделей не характерний цикл А. Однак оптимізує блок (цикл С) завжди реалізують при вирішенні задач синтезу систем.

## Резюме

1. Основними етапами машинного моделювання є: побудова концептуальної (описової) моделі, виділення параметрів системи, алгоритмізація і формалізація моделі, її реалізація на ЕОМ.

2. При синтезі систем дуже важливим є завдання оптимізації - пошук найбільш вигідних параметрів системи або процесу її функціонування. У загальному випадку розрізняють 3 циклу моделі, оптимізують є зовнішній.

## Лекція 7. Інструментальні засоби моделювання

Після формалізації і алгоритмізації моделі проводять вибір технічних засобів і програмного забезпечення для моделювання (реалізації моделі).

Як програмне забезпечення зазвичай вибирають:

1. Алгоритмічна мова програмування.
2. Мова моделювання
3. Програму універсального призначення (як правило, математичну інтегровану середу - МІС)
4. моделює систему (систему моделювання).

Алгоритмічні мови та мови моделювання зазвичай вибирають програмісти-професіонали або висококваліфіковані користувачі. Простий користувач зазвичай вибирає в якості програмного засобу машинної реалізації моделі МІС або систему моделювання.

Система моделювання - програмний комплекс, який оперує високим рівнем мови опису моделі.

Система моделювання вимагає при підготовці розбиття на блоки і опису даного блоку з точки зору його функціонування. Інтерфейс систем моделювання будують таким чином, щоб рівень користувача вимагав мінімальних знань (опис системи проводиться на мові, близькій до людського).

Приклад системи моделювання дії руху - програма "**CHAINS**", яка моделює рух двомірного багатозв'язника у полі сили тяжіння (розроблена у середині 90<sup>х</sup> рр. у НІІ РГАФК).

Приклад системи моделювання економічної структури і діяльності фірм - програма Grade Modeler.

Якщо користувач вибирає для реалізації моделі МІС, то від нього вимагається високий рівень знань про досліджуваний об'єкт (побудова математичної моделі цілком і повністю лягає на плечі користувача) і певний навик реалізації математичних алгоритмів в даній МІС. Основна перевага використання МІС перед мовами програмування - багатий набір математичних функцій і операцій і зручні способи їх реалізації. Основна перевага МІС перед системами моделювання - їх універсальність, велика ступінь гнучкості і можливість більш швидкої і зручної модифікації моделі.

Найбільш популярні МІС в даний час - програмні продукти сімейств *MathCad* та *MathLab*.

## Резюме

1. Для машинної реалізації моделі необхідно відповідне програмне забезпечення.

2. Застосовується для машинного моделювання програмне забезпечення можна поділити на 4 види. Оскільки кожен вид має як достоїнствами, так і недоліками, то основним завданням оператора є адекватний підбір програми або комплексу програмних засобів для реалізації моделі.

## Резюме до розділу 2

1. Моделювання - найбільш універсальний метод пізнання дійсності, спосіб отримання інформації про об'єкти і процеси, а також методологічна база системного аналізу.

2. Модель являє собою і об'єкт-замінник, і систему знань. Моделювання як процес аналізу або синтезу систем також є системним. Як будь-яка система, моделювання переслідує певну мету, реалізує певні функції і має безліч різних типів (відповідно до власної класифікацією). Найбільш зручним і універсальним видом моделювання є математичне.

3. В даний час моделювання немислимо без машинної реалізації. Основними етапами машинного моделювання є: побудова концептуальної моделі системи, її формалізація і алгоритмізація, реалізація на ЕОМ на основі оптимального підбору комплексу програмних засобів.

## Лекція 8. Обробка результатів досліджень і визначення помилок

Основою всього природознавства є спостереження і експеримент.

Спостереження - це систематичне, цілеспрямоване сприйняття того чи іншого об'єкта або явища без впливу на досліджуваний об'єкт або явище.

Спостереження дозволяє отримати первинну інформацію по досліджуваному об'єкту або явища.

Експеримент - метод вивчення об'єкта, коли дослідник активно і цілеспрямовано впливає на нього шляхом створення штучних умов або використовує природні умови, необхідні для виявлення відповідних властивостей. Перевагами експерименту в порівнянні з наглядом реального явища або об'єкта є:

1. Можливість вивчення в «чистому вигляді», без впливу побічних чинників, що затемнюють основний процес;
2. В експериментальних умовах можна отримати результат швидше і точно;
3. При експерименті можна проводити випробування стільки разів, скільки це необхідно.

Результат експерименту або вимірювання завжди містить деяку похибку. Якщо похибка мала, то нею можна знехтувати. Однак при цьому неминуче виникають два питання: поперше, що розуміти під малою похибкою, і, подруге, як оцінити величину похибки. Тобто, і результати експерименту потребують певного теоретичного осмислення.

#### Цілі математичної обробки результатів експерименту

Метою будь-якого експерименту є визначення якісної і кількісної зв'язку між досліджуваними параметрами, або оцінка чисельного значення будь-якого параметра.

У деяких випадках вид залежності між змінними величинами відомий за результатами теоретичних досліджень. Як правило, формули, що виражають ці залежності, містять деякі постійні, значення яких і необхідно визначити з досвіду.

Іншим типом завдання є визначення невідомої функціональної зв'язку між змінними величинами на основі даних експерименту. Такі залежності називають емпіричними.

Однозначно визначити невідому функціональну залежність між змінними неможливо навіть в тому випадку, якщо б результати експерименту не мали помилок. Тим більше не слід було цього очікувати, маючи результати експерименту, що містять різні помилки вимірювання.

Тому слід чітко розуміти, що метою математичної обробки результатів експерименту є не знаходження істинного характеру залежності між змінними або абсолютної величини будь-якої константи, а представлення результатів спостережень у вигляді найбільш простої формули з оцінкою можливої похибки її використання.

#### Види вимірювань і причини помилок

Під вимірюванням розуміють порівняння вимірюваної величини з іншою величиною, прийнятої за одиницю виміру.

Розрізняють два типи вимірювань: прямі і непрямі. При прямому вимірі яка вимірюється величина порівнюється безпосередньо зі своєю одиницею заходи. Наприклад, вимір мікрометром лінійного розміру, проміжку часу за допомогою годинникових механізмів, температури термометром, сили струму амперметром і т.п. Значення вимірюваної величини відраховується при цьому за відповідною шкалою приладу.

При непрямому вимірі яка вимірюється величина визначається (обчислюється) за результатами вимірювань інших величин, які пов'язані з вимірюваною величиною певної функціональною залежністю. Наприклад, вимірювання швидкості з пройденого шляху і витраченому часу, вимір щільності тіла по вимірюванню маси і об'єму, температури при різанні по електрорушійної сили, величини сили по пружним деформаціям і т.п.

При вимірюванні будь-якої фізичної величини проводять перевірку і установку відповідного приладу, спостереження їх показань і відлік. При цьому ніколи істинного значення вимірюваної величини не одержати. Це пояснюється тим, що вимірювальні засоби засновані на певному методі вимірювання, точність якого кінцева. При виготовленні приладу задається клас точності. Його похибка визначається точністю ділень шкали приладу. Якщо шкала лінійки нанесена через 1 мм, то точність відліку 0,5 мм не змінити якщо застосуємо лупу для розглядання шкали. Аналогічно відбувається вимір і при використанні інших вимірювальних засобів.

Крім приладовій похибки на результат вимірювання впливає ще ряд об'єктивних і суб'єктивних причин, які обумовлюють появу помилки вимірювання різниці між результатом вимірювання і істинним значенням вимірюваної величини. Помилка вимірювання зазвичай невідома, як невідомо і істинне значення вимірюваної величини. Виняток становлять вимірювання відомих величин при визначенні точності вимірювальних приладів або їх тарировке. Тому одним з найважливіших завдань математичної обробки результатів експерименту і є оцінка істинного значення вимірюваної величини за даними експерименту з можливо меншою помилкою.

### Типи помилок вимірювання

Крім приладовій похибки вимірювання (яка визначається методом вимірювання) існують і інші, які можна розділити на три типи:

1. Систематичні похибки обумовлюються постійно діючими факторами. Наприклад, зсув початкової точки відліку, вплив нагрівання тіл на їх подовження, знос ріжучого леза і т.п. Систематичні помилки виявляють при відповідній тарировке приладів і тому вони можуть бути враховані при обробці результатів вимірювань.

2. Випадкові помилки містять в своїй основі багато різних причин, кожна з яких не проявляє себе чітко. Випадкову помилку можна розглядати як сумарний ефект дії багатьох чинників. Тому випадкові помилки при багаторазових вимірах виходять різними як за величиною, так і за знаком. Їх

неможливо врахувати як систематичні, але можна врахувати їх вплив на оцінку істинного значення вимірюваної величини. Аналіз випадкових помилок є найважливішим розділом математичної обробки експериментальних даних.

3. Грубі помилки (промахи) з'являються внаслідок неправильного відліку за шкалою, неправильного запису, невірної установки умов експерименту і т.п. Вони легко виявляються при повторному проведенні дослідів.

### Лекція 9. Графічний метод обробки результатів

Графічний метод полягає в побудові графіка залежності між досліджуваними величинами з подальшим визначенням рівняння залежності між ними.

Графіки будують насамперед у рівномірних шкалах. Якщо характер зв'язку між досліджуваними величинами невідомий, то спочатку перевіряють збіг експериментальних точок із заданою кривою. Якщо попередні відомості про характер рівняння відсутні, то першим етапом обробки даних є знаходження кривої, що збігається з досвідченими точками. Це завдання вирішується методом підбору. Можна використовувати еталон кальку з попередньо викресленим на ній сімейством кривих з різними параметрами. Природно, що масштаб кальки і емпіричної кривої повинен бути однаковий.

Побудований за дослідними даними відрізок кривої може збігатися з великою кількістю різних кривих, що проходять досить близько до досвідчених точок. У цьому випадку вибирають криву з найбільш простим і зручним у використанні рівнянням. Іноді емпірична крива може мати перегини або складатися з окремих яскраво виражених ділянок. Однак при цьому необхідно визначити координати точок переходу від однієї кривої до іншої.

Рівняння залежності між досліджуваними величинами при графічному методі просто визначається тоді, коли емпіричні точки досить добре збігаються з прямою лінією, тобто описуються рівнянням  $y = ax + b$ , де  $a$ ,  $b$  – коефіцієнти, які необхідно визначити.

Визначення коефіцієнтів при графічному методі засновано на способі натягнутою ніті. Завдавши результати експерименту на графік (краще, якщо він виконаний на міліметровці), підбираємо графічну пряму, найближче підходить до нанесених точкам. Вибравши розміщення прямої, визначаємо дві довільні точки на цій прямій (не обов'язково є точками експерименту), визначаємо їх координати  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$ . І для визначення коефіцієнтів  $a$  і  $b$  отримуємо два простих рівняння

$$ax_1 + b = y_1;$$

$$ax_2 + b = y_2.$$

Точки  $\tilde{\phantom{x}}$  результати, отримані в експерименті. Пряма проведена на око якомога ближче до експериментальних точок. На прямій обрані точки М (2; 4) і N (13; 10). Коефіцієнт а характеризує кут нахилу прямої.

Тому

$$a = \operatorname{tg}\beta = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{10 - 4}{13 - 2} = \frac{6}{11} \approx 0,55$$

$$b = y_M - ax_M = y_N - ax_N = 4 - 0,55 \cdot 2 = 2,9.$$

Таким чином  $y = 0,55x + 2,9$ .

У разі, якщо експериментальна залежність має нелінійний характер, то графічним способом в системі координат з рівномірними шкалами визначити коефіцієнти кривої важко. Але досить великий клас нелінійних залежностей шляхом заміни змінних і графічного зображення в функціональних шкалах можна привести до лінійних і далі використовувати спосіб натягнутою нитки.

### Функціональні шкали та їх застосування

Нехай функція  $y = f(x)$  є неперивною та монотонною на деякому проміжку  $[a; b]$ . Візьмемо вісь ОМ, на якій буде побудовано шкала, оберемо на ній точку початку відрахунку О і встановимо масштаб  $\mu$ . Функціональну шкалу будують наступним чином.

Розбивши інтервал  $[a; b]$  на рівні частини, обчислюємо значення функції  $f(x)$  у кожній з точок ділення на відкладаємо на вісі ОМ для кожної точки відрізок  $\mu f(x)$ . Точка, яка при цьому утворюється, снабжається міткою  $x$ , тобто відкладається в обраному масштабі значення функції, а надписується значення аргументу.

Іноді початок шкали розміщують у першій точці відліку, тобто точку з написом  $a$  суміщують з 0. Тоді точка  $x$  буде знаходитися у кінці відрізка  $\mu [f(x) - f(a)]$ . Отримана шкала дозволяє судити про поведінку функції на даній ділянці: великі проміжки між відмітками вкажуть, що функція змінюється швидше, ніж там, де ці проміжки малі.

Вибір масштабу  $\mu$  визначає довжину шкали. Частіше роблять навпаки: задаються довжиною шкали  $l$  та визначають масштаб.

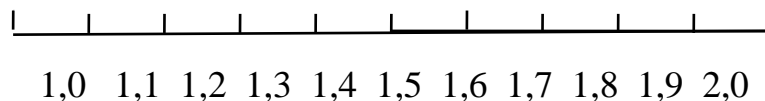
$$\mu[f(b) - f(a)] = l \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{l}{f(b) - f(a)}.$$



Приклад. Побудуємо функціональну шкалу для функції  $y = x^2$  на ділянці  $[ 1; 2 ]$ . Задаємо довжину шкали  $l = 12$  см. Тоді  $\mu = \frac{12}{2^2 - 1^2} = 4$  см. Розіб'ємо відрізок  $[ 1; 2 ]$  на десять рівних ділянок та обчислимо значення функції у всіх точках ділення. Сумістимо початок шкали з точкою відліку  $x = 1$ . Результати розрахунку зведено у таблиці, а функціональна шкала приведена на рисунку.

Розрахунок функціональної шкали  $y = x^2$

x	,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$x^2$	,0	,21	,44	,69	,96	,25	,56	,89	,24	,61	,00
$x^2 - 1$	0	,21	,44	,69	,96	,25	,56	,89	,24	,26	,00
$4(x^2 - 1)$		,84	,76	,76	,84	,00	,24	,56	,94	0,44	2,0



Функціональна шкала  $y = x^2$

За допомогою функціональних шкал графіки багатьох функцій можуть бути перетворені до прямолінійного узві.

Наприклад, рівняння параболи  $y = x^2$ . Якщо на вісі ОУ нанести рівномірну шкалу, а на вісі ОХ<sub>1</sub> шкалу квадратів  $x_1 = x^2$ , то отримаємо сітку, де рівняння параболи має відображення прямої лінії ( $y = x_1$ ), яка проходить через початок координат.

Особливо часто використовуються різні логарифмічні функції, за допомогою яких можна «випрямлять» графіки статечних і показових функцій. Наприклад,  $y = ae^{bx}$ ;  $\lg y = (b \lg e) x + \lg a$ . Полагаючи  $\lg y = y_1$ ,  $\lg a = A$ ,  $b \lg e = B$  запишемо вихідне рівняння у вигляді  $y_1 = A + Bx$ , з якого видно, що залишивши рівномірною шкалу  $x$  та побудувавши логарифмічну шкалу  $y_1$ , можна відобразити вихідне рівняння прямою лінією. Одержана координатна сітка називається напівлогарифмічною.

Очевидно, що такого роду перетворення можливі і в більш загальному випадку. Будь-яка неявна функція, задана співвідношенням виду

$$a\varphi(x) + b\psi(y) + c = 0,$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – постійні, буде зображуватися прямою лінією на функціональній сітці, де на осі  $OX$  побудована шкала  $\varphi(x)$ , а на осі  $OY$  – шкала функції  $\psi(y)$ . Функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(y)$  повинні задовольняти умовам безперервності і монотонності. В таблиці наведені перетворення для деяких функцій.

### Лінеаризація деяких функцій

Вихідна формула	Перетворена формула	Заміна змінних	Лінеаризована формула
$y=ax$	$\lg y = b \cdot \lg x + \lg a$	$\lg y = y_1$ $\lg x = x_1$ $\lg a = a_1$	$y_1 = bx_1 + a_1$
$y = a \cdot \lg x + b$	—	$\lg x = x_1$	$y = ax_1 + b$
$y = e^{bx}$	$\lg y = b \cdot \lg e \cdot x + k \cdot \lg e$	$\lg y = y_1$ $b \cdot \lg e = a$ $k \cdot \lg e = k_1$	$y_1 = ax + k_1$
$y = a e^{bx}$	$\lg y = bx \cdot \lg e + \lg a$	$\lg y = y_1$ $b \cdot \lg e = b_1$ $\lg a = a_1$	$y_1 = b_1 x + a_1$
$y = \frac{a}{\tilde{0}} + b$	—	$\frac{1}{\tilde{0}} = \tilde{0}_1$	$y = ax_1 + b$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = ax + b$	$\frac{1}{y} = y_1$	$y_1 = ax + b$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = \frac{b}{x} + a$	$\frac{1}{y} = y_1$ $\frac{1}{x} = x_1$	$y_1 = bx_1 + a$

Зі сказаного зрозуміла роль функціональних сіток при обробці результатів експерименту. Якщо результати експерименту розташовуються поблизу кривої, то за наявним обмеженому ділянці кривої важко судити, якого типу функцією її найкраще наближати. Перевівши отримані експериментальні дані на функціональні сітки можна оцінити на який з них

ці дані найближче підходять до прямої і, отже, якою функцією найкраще описуються.

### Аналітичні методи обробки результатів

Графічний метод обробки результатів володіє наочністю, відносною простотою, однак його результати містять певну суб'єктивність і відносно низьку точність.

Аналітичні методи позбавлені в якійсь мірі зазначених недоліків і дозволяють отримати результат для більш широкого класу функцій з більшою точністю, ніж графічний метод.

Існують різні аналітичні методи отримання параметрів емпіричних кривих в залежності від критерію, прийнятого при їх отриманні. Розглянемо деякі з існуючих способів.

#### Спосіб середньої

Припустимо, що маємо  $n$  сполучень  $x_i, y_i$ , одержаних при експерименті. Навіть у тому випадку, якщо між  $x$  та  $y$  теоретично встановлено функціональний зв'язок (наприклад, лінійний), то значення  $y_i$  відрізнятимуться від  $ax_i + b$  через наявність експериментальних помилок. Позначимо через  $\Delta_i$  відповідну похибку

$$\Delta_i = y_i - ax_i - b \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Якщо обирати параметри  $a$  і  $b$  так, щоб для всіх  $n$  спостережень похибки врівноважувались, тобто  $\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0$ , то це привело б до одного рівняння, тоді як для знаходження двох коефіцієнтів ( $a, b$ ) необхідно два. Тому припустимо, що урівноваження відбувається не тільки для всіх вироблених спостережень в цілому, але і для кожної групи, що містить половину (або майже половину) всіх спостережень окремо.

В цьому випадку можна прийти до системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases},$$

де  $m$  – число спостережень у першій групі.

Дану систему рівнянь запишемо тепер у вигляді

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^m x_i + mb = \sum_{i=1}^m y_i \\ a \sum_{i=m+1}^n x_i + (n-m)b = \sum_{i=m+1}^n y_i \end{cases}$$

Викладене показує, що метод середніх «врівноважує» позитивні і негативні відхилення теоретичної кривої від експериментальних значень.

### Лекція 10. Апроксимація експериментальних даних

На практиці часто доводиться стикатися із завданням про згладжування експериментальних залежностей або завданням апроксимації.

Апроксимацією називається процес підбору емпіричної формули  $\varphi(x)$  для встановленої з досвіду функціональної залежності  $y=f(x)$ . Емпіричні формули служать для аналітичного подання досвідчених даних.

Апроксимація (від латинського "approximate" - "наближатися") - наближене вираження будь-яких математичних об'єктів (наприклад, чисел або функцій)

через інші більш прості, більш зручні в користуванні або просто більш відомі. Як відомо, між величинами може існувати точна (функціональна) зв'язок, коли одному значенню аргументу відповідає одне певне значення, і менш точна (кореляційний) зв'язок, коли одному конкретному значенню аргументу відповідає наближене значення або деякий безліч значень функції, в тій чи іншій мірі близьких один до одного.

Для знаходження цих значень і застосовується апроксимація - наближений опис кореляційної залежності змінних відповідним рівнянням функціональної залежності, що передає основну тенденцію залежності (або її "тренд").

Зазвичай, чим більше просте рівняння використовується для апроксимації, тим більше приблизно одержуване опис залежності.

Ці значення  $y_i$  будемо називати емпіричними чи досвідченими значеннями.

Між величинами  $x$  і  $y$  існує функціональна залежність, але її аналітичний вид зазвичай невідомий, тому виникає практично важливе завдання - знайти емпіричну формулу

У наукових дослідженнях апроксимація застосовується для опису, аналізу, узагальнення та подальшого використання емпіричних результатів.

Зазвичай завдання апроксимації розпадається на дві частини. Спочатку встановлюють вид залежності  $y=f(x)$  і, відповідно, вид емпіричної формули, тобто вирішують, чи є вона лінійної, квадратичної, логарифмічної або будь-якої іншої. Після цього визначаються чисельні значення невідомих параметрів обраної емпіричної формули, для яких наближення до заданої функції виявляється найкращим. Якщо немає яких-небудь теоретичних

міркувань для вибору типу формули, зазвичай вибирають функціональну залежність з числа найбільш простих, порівнюючи їх графіки з графіком заданої функції.

Після вибору виду формули визначають її параметри. Для найкращого вибору параметрів задають міру близькості апроксимації експериментальних даних. У багатьох випадках, особливо якщо функція  $f(x)$  задана графіком або таблицею (на дискретній множині точок), для оцінки ступеня наближення розглядають різниці  $f(x_i) - \varphi(x_i)$  для точок  $x_0, x_1, \dots, x_n$

Зазвичай визначення параметрів при відомому вигляді залежності здійснюють за методом найменших квадратів. При цьому функція  $\varphi(x)$  вважається найкращим наближенням до  $f(x)$ , якщо для неї сума квадратів  $\delta_i$  або відхилень теоретичних значень  $\varphi(x_i)$ , знайдених за емпіричною формулою, від відповідних експериментальних значень на  $up$

1. Щоб спрогнозувати будь-яку подію на основі вже наявних даних, можна скористатися лінією тренда. За допомогою неї можна візуально зрозуміти, яку динаміку мають дані, з яких побудований графік.

2. Лінія тренда - графічне представлення напрямки зміни ряду даних. Існує п'ять різних видів ліній тренда, які можуть бути додані на діаграму Microsoft Excel.

3. Лінійна апроксимація - це апроксимація набору даних за допомогою рівняння прямої. Вона застосовується в найпростіших випадках, коли точки даних розташовані близько до прямої. Лінійна апроксимація хороша для величини, яка збільшується або зменшується з постійною швидкістю. Рівняння має вигляд:  $y(x) = ax + b$

4. Логарифмічна апроксимація використовується для опису величини, яка спочатку швидко зростає або убиває, а потім поступово стабілізується. Логарифмічна апроксимація використовує як негативні, так і позитивні величини. Рівняння має вигляд:  $y(x) = a \ln x + b$

5. Поліноміальна апроксимація використовується для опису величин, поперемінно зростаючих і відбувають. Вона корисна, наприклад, для аналізу великого набору даних про нестабільну величиною. Рівняння полінома другого ступеня має вигляд:  $y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

6. Статична апроксимація використовується для опису монотонно зростаючої або монотонно спадної величини, наприклад відстані, пройденого розганяє автомобіль. Використання статичної апроксимації неможливо, якщо дані містять нульові або негативні значення. Рівняння має вигляд:  $y(x) = ax^b$

7. Експоненціальна апроксимація використовується в тому випадку, якщо швидкість зміни даних безупинно зростає. Однак для даних, які містять нульові або негативні значення, цей вид наближення непридатний. Рівняння має вигляд:  $y(x) = ae^{bx}$

Величина достовірності апроксимації ( $R^2$ ) - Коефіцієнт детермінації

Значення R-квадрат ( $R^2$ ) - число від 0 до 1, яке відображає близькість значень лінії тренда до фактичних даних. Лінія тренда найбільш відповідає дійсності, коли значення R-квадрат близько до 1.

Якщо він дорівнює 1, то має місце повна кореляція з моделлю, тобто немає різниці між фактичним і оцінним значеннями  $y$ . У протилежному випадку, якщо коефіцієнт детермінованості дорівнює 0, то рівняння регресії невдало для передбачення значень  $y$ . При апроксимації даних за допомогою лінії тренду значення R-квадрат розраховується автоматично і отриманий результат можна вивести на діаграмі.

Нехай є якісь дані, отримані практичним шляхом (в ході експерименту або спостереження), які можна уявити парами чисел  $(x, y)$ . Залежність між ними відображає таблиця. На основі цих, даних потрібно підібрати функцію  $y = \varphi(x)$ , яка найкращим чином згладжувала б експериментальну залежність між змінними і по можливості точно відображала загальну тенденцію залежності між  $x$  і  $y$ , виключаючи похибки вимірювань і випадкові відхилення.

Апроксимація експериментальних даних. Кілька незалежних змінних. У тих випадках, коли апроксимується змінна  $y$  залежить від декількох незалежних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , підхід з побудовою лінії тренду не дає рішення. Тут можуть бути використані наступні спеціальні функції MS Excel:

**ЛИНЕЙН** і **ТЕНДЕНЦИЯ** для апроксимації лінійних функцій виду:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

**ЛИНЕЙН**(*известные\_значения\_y; известные\_значения\_x; конст; статистика*)

**ТЕНДЕЦИЯ**(*известные\_значения\_y; известные\_значения\_x; новые\_значения\_x; конст*).

**РОСТ** (*известные\_значения\_y; известные\_значения\_x; новые\_значения\_x; конст*).